Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.»

И.А. Челышева

РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ И МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Методические указания
к решению задач по дисциплине «Начертательная геометрия»
для студентов направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
09.03.04 «Программная инженерия»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическоеобеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
23.03.01 «Нефтегазовое дело»
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

очной и заочной форм обучения

Энгельс 2024

ВВЕДЕНИЕ

При выполнении студентами расчетно-графической работы встречаются существенные трудности, поэтому в организации самостоятельной работы основной задачей преподавателя является оказание методической помощи студенту.

В данном методическом указании информационный материал проиллюстрирован, разработаны примеры решения задач с подробными пояснениями.

Изображения, построенные по правилам, изучаемым в начертательной геометрии, позволяют представить мысленно форму предметов и их взаимное расположение в пространстве, определить их размеры.

Правила построения изображений основаны на методе проекций. Рассмотрение метода проекций начинают с построения проекций точек, так как при построении изображения любой пространственной формы рассматривается ряд точек, принадлежащих этой форме.

Изображение предмета на нескольких совмещенных плоскостях называют комплексным чертежом (эпюром). На рис. 1 изображено наглядное изображение точки и эпюр.

$A_2 A_X$ – высота точки А;

$A_1 A_X$ – глубина точки А;

$A_1 Ay$ – ширина точки А.

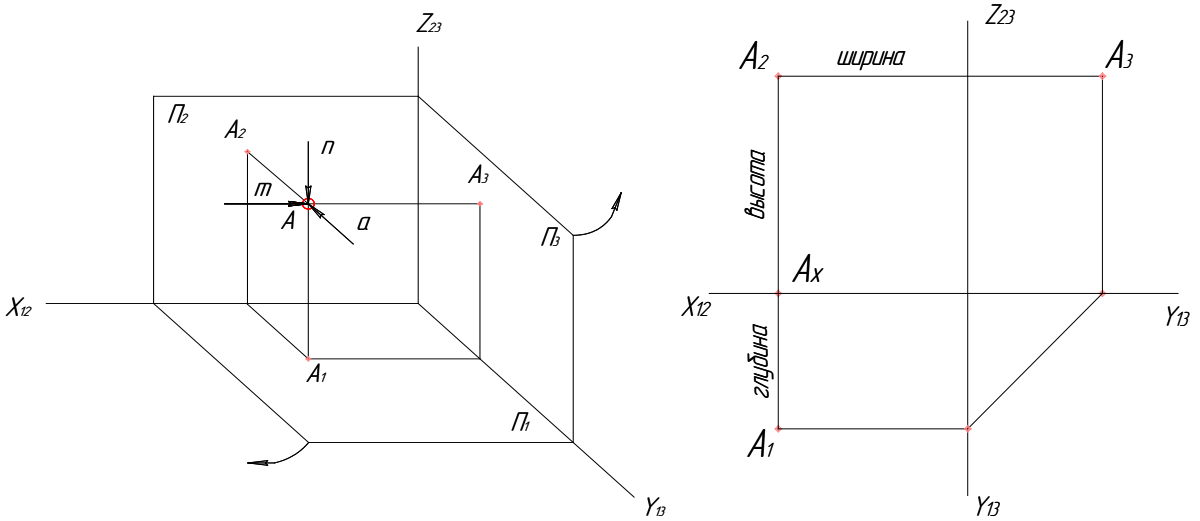


Рис. 1

На рис. 2 выполнен эпюр точки В Є $П_2$ (точка В лежит в плоскости $П_2$). Глубина точки (Ув) равна нулю.

На рис. 3 показана точка С Є Z (точка С принадлежит оси Z), точка С не имеет глубины и ширины.

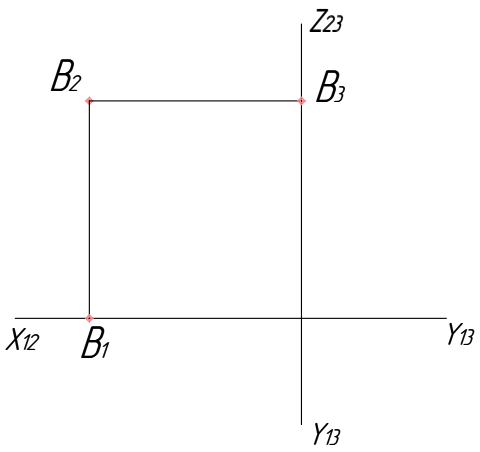


Рис. 2

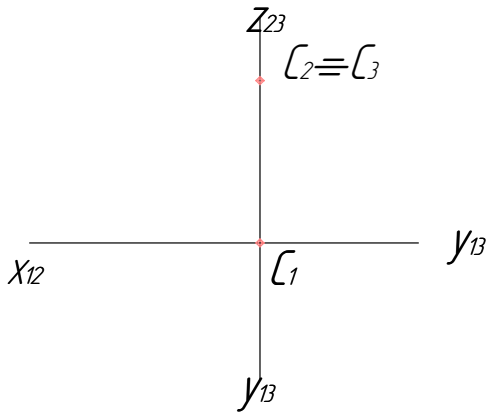


Рис. 3

ПРЯМАЯ

Прямая общего положения – прямая не параллельная ни одной из плоскостей проекций, на рис. 4 изображены три проекции отрезка АВ прямой общего положения.

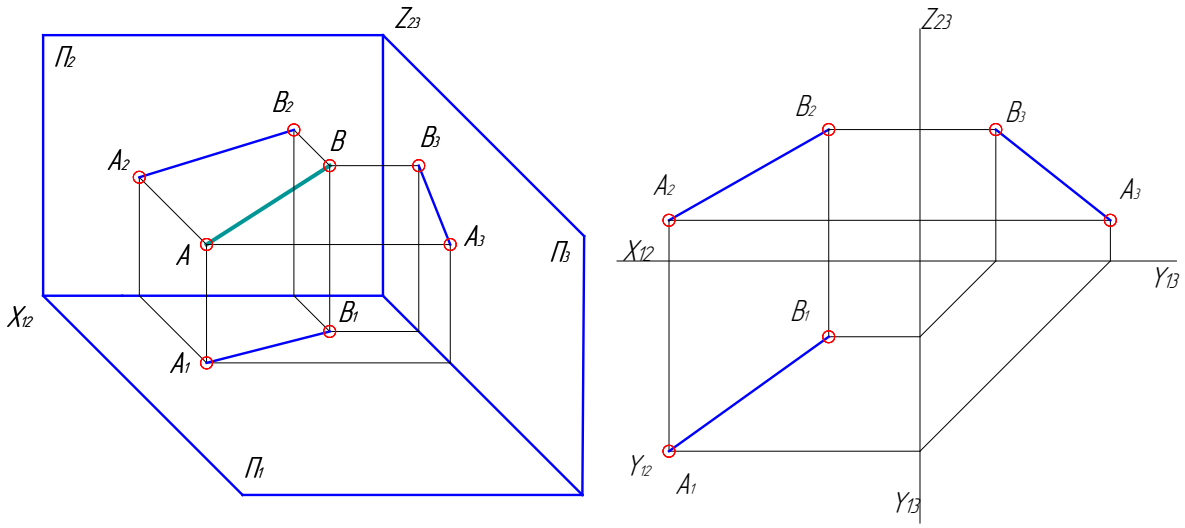


Рис. 4

Прямые частного положения – прямые уровня и проецирующие прямые.

Прямая уровня – прямая, параллельная одной плоскости проекций (рис. 5).

Проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная плоскости проекций (рис. 6).

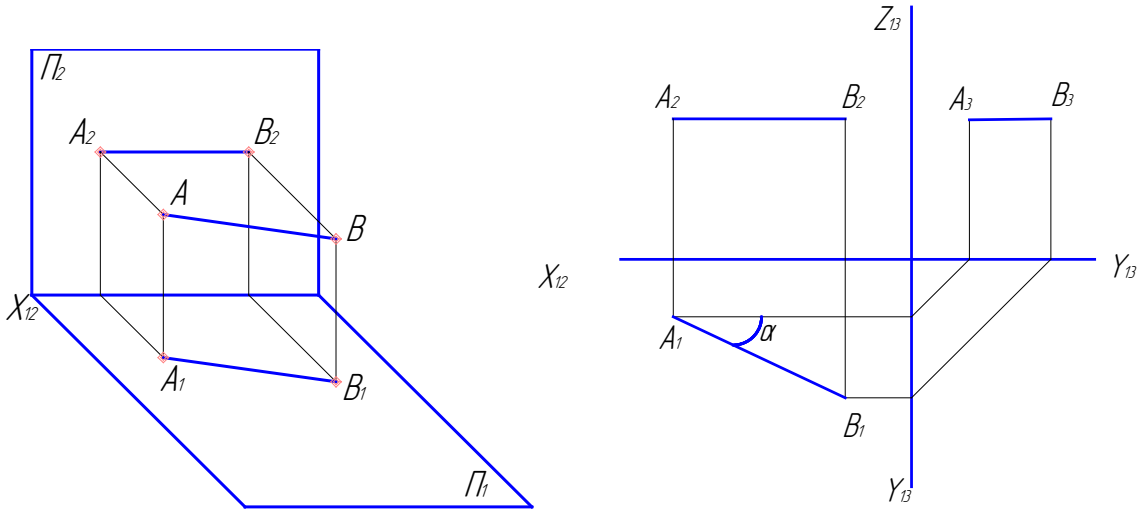


Рис. 5

AB|| $П_1$; A_2B_2||X_{12}, т.е. Za=Zв; A_1B_1 – натуральная величина отрезка; α – угол наклона AB к $П_2$.

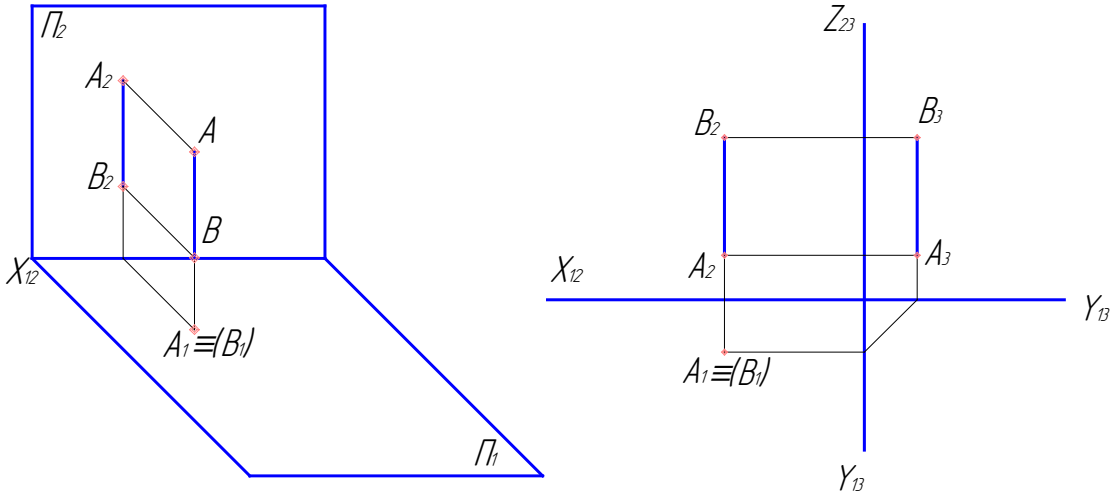


Рис. 6

AB⊥$П_1$; A_1B_1 – вырожденная проекция, A_2B_2||Z, A_3B_3 ||Z.

ПЛОСКОСТЬ

Плоскость общего положения – плоскость не параллельная ни одной из плоскостей проекций (рис. 7).

Плоскости частного положения:

а) плоскости уровня – плоскости, параллельные одной плоскости проекций (рис. 8);

б) проецирующие плоскости – плоскости, перпендикулярные плоскости проекций (рис. 9).

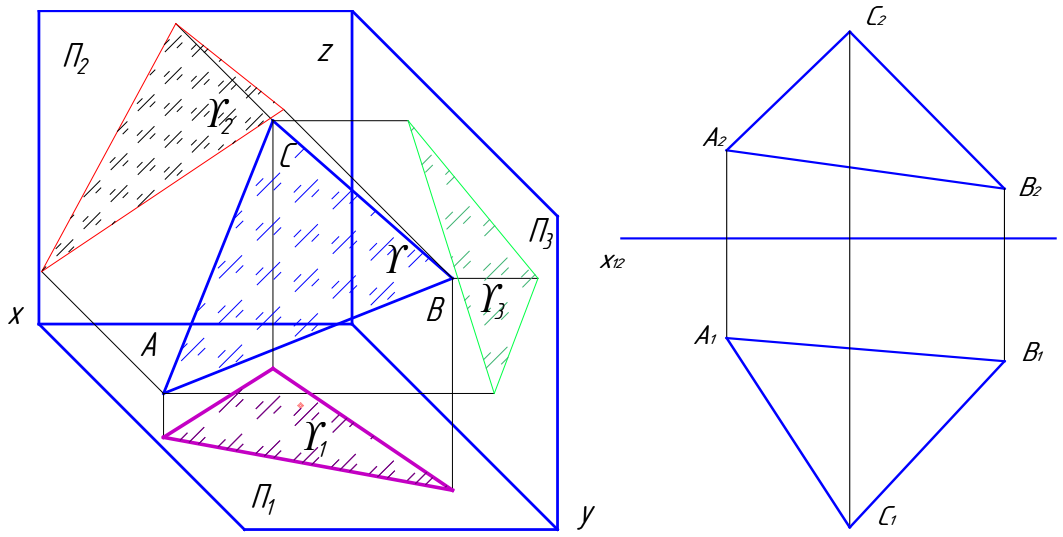


Рис. 7

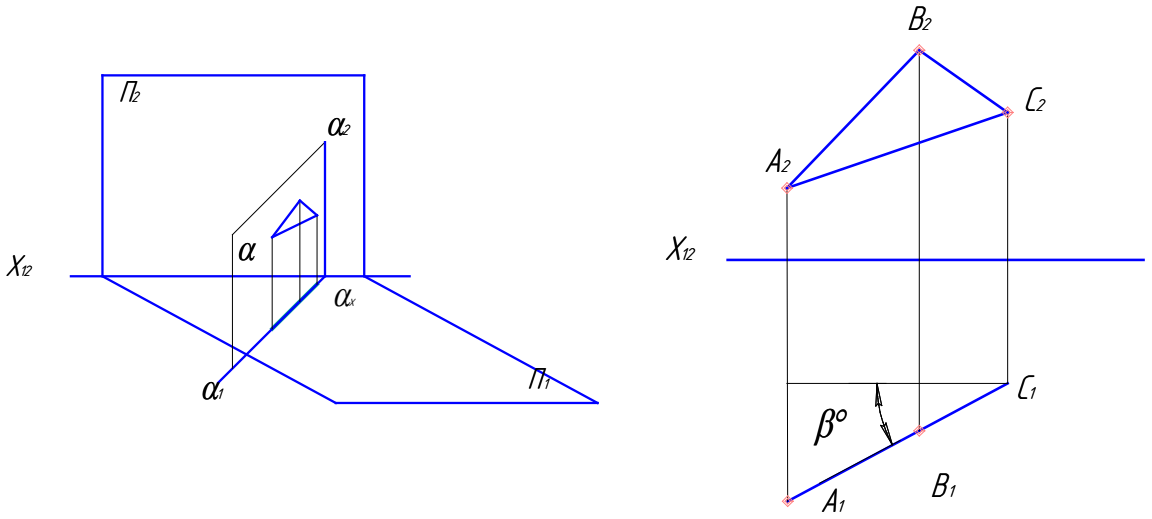


Рис. 8

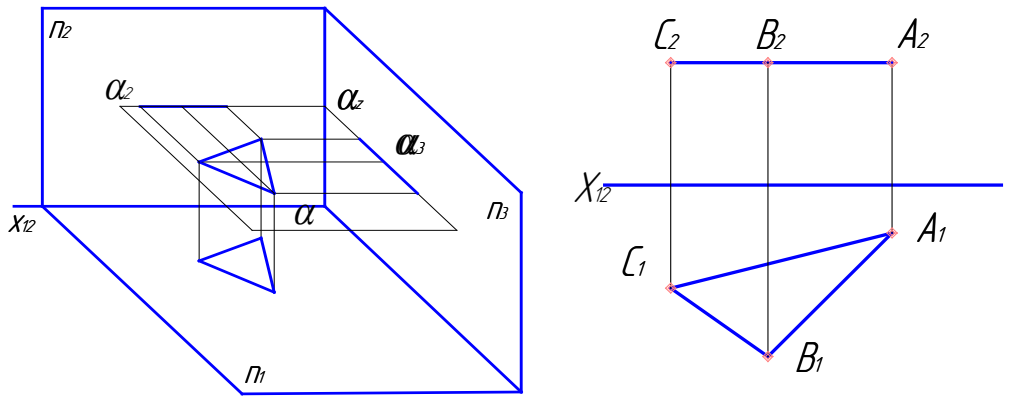


Рис. 9

На рис. 8 $\alpha \perp \Pi_1$. Проецирующая плоскость изображается прямой линией на той плоскости проекции, к которой она перпендикулярна.
$\beta°$ – угол наклона плоскости α к плоскости Π_2.

На рис. 9 $\alpha || \Pi_1$, ΔABC проецируется на плоскость Π_1 без искажения.

Относительное положение точки и прямой

Если точка А принадлежит прямой, то проекции ее лежат на одноименных проекциях прямой (рис. 10).

$A \in b$, т.к. $A_1 \in b_1$, $A_2 \in b_2$.

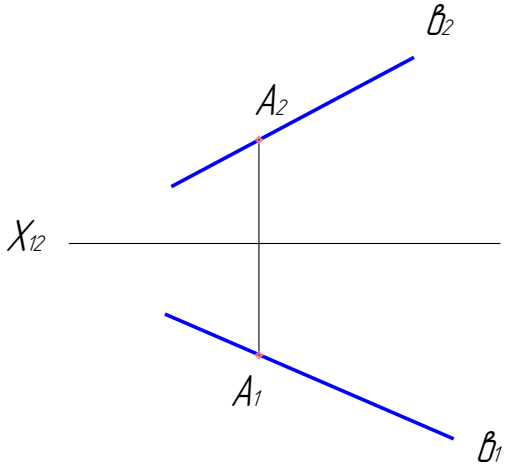


Рис. 10

Относительное положение точки, прямой и плоскости.

а) прямая принадлежит плоскости, если она проходит через 2 точки, лежащие этой плоскости (рис. 11).

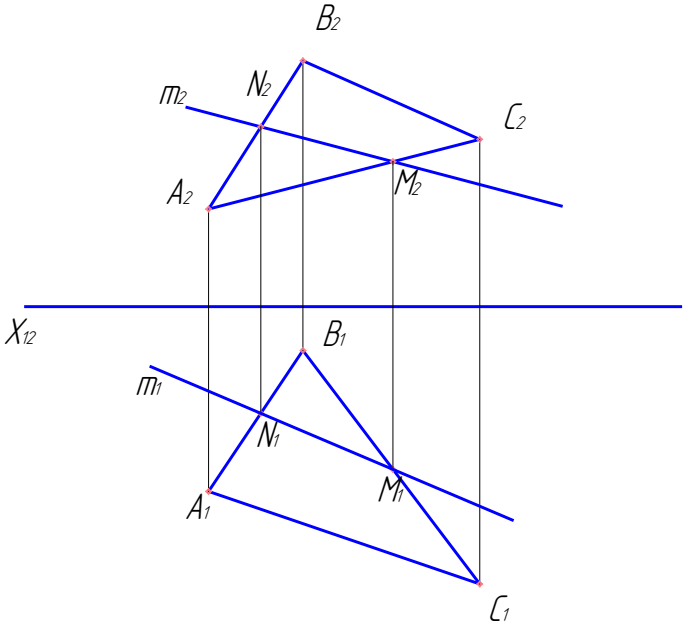


Рис. 11

б) точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой лежащей в этой плоскости (рис. 12).

а Є α(m‖n), А Є α, т.к. А Є а.

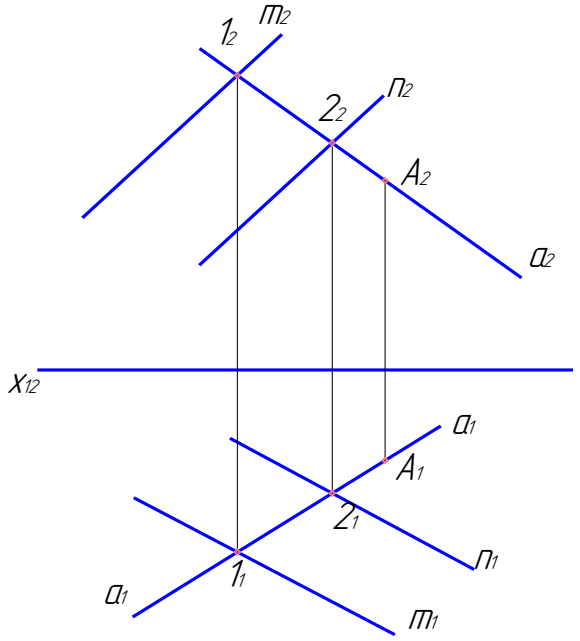


Рис. 12

ГЛАВНЫЕ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ

Горизонталь – прямая, лежащая в плоскости и параллельная плоскости $П_1$. Обозначается горизонталь – h (рис. 13).

$h_2 \| X_{12}$

$h_2 \cap B_2C_2 = 1_2 \rightarrow 1_1$

через точки A_1 и 1_1 проводим h_1.

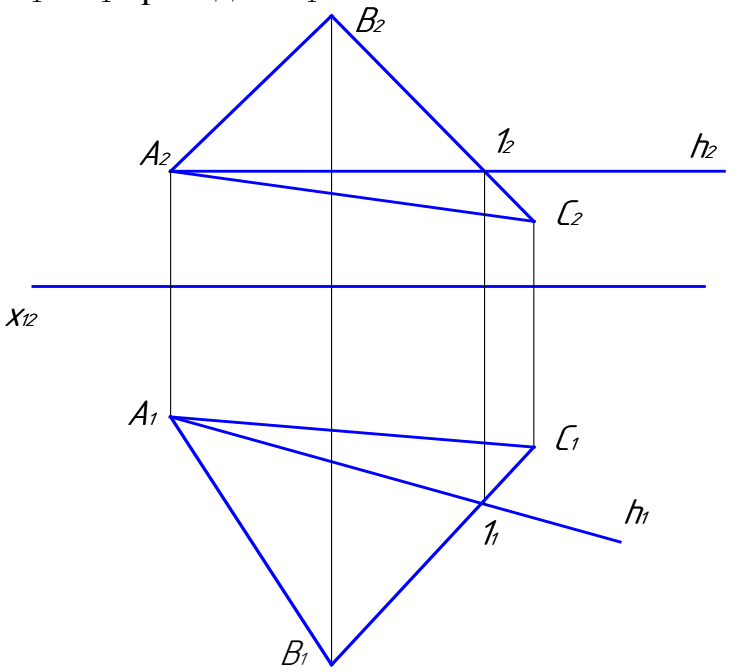


Рис. 13

Фронталь – прямая, лежащая в плоскости и параллельная плоскости $П_2$. Обозначается фронталь – f (рис.14).

$f_1 \parallel X_{12}$

$f_1 \cap A_1B_1 = 1_1 \rightarrow 1_2$

проводим f_2 через точки 1_2 и C_2.

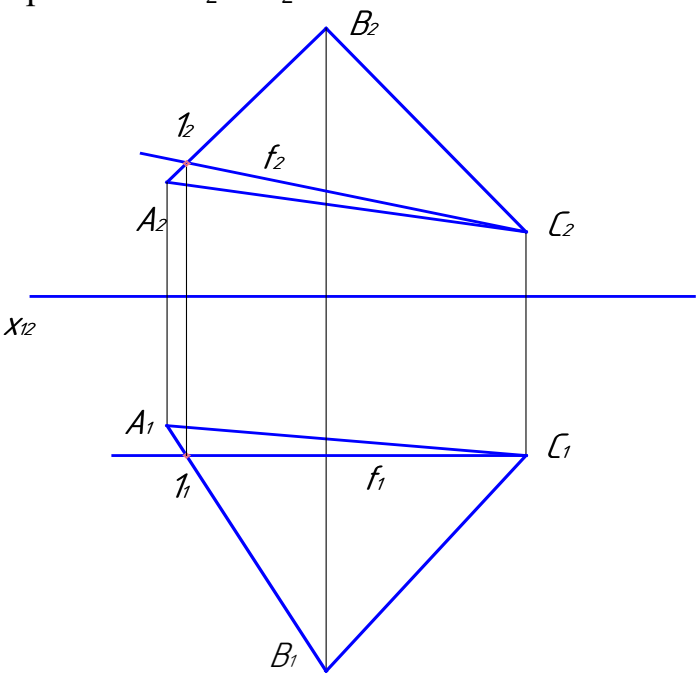


Рис. 14

МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЯМОЙ

Натуральная величина отрезка прямой и углы наклона ее к плоскостям проекций

Натуральная величина прямых частного положения определяется проекциями этих прямых.

Натуральную величину прямой общего положения можно определить с помощью прямоугольного треугольника (рис. 15).

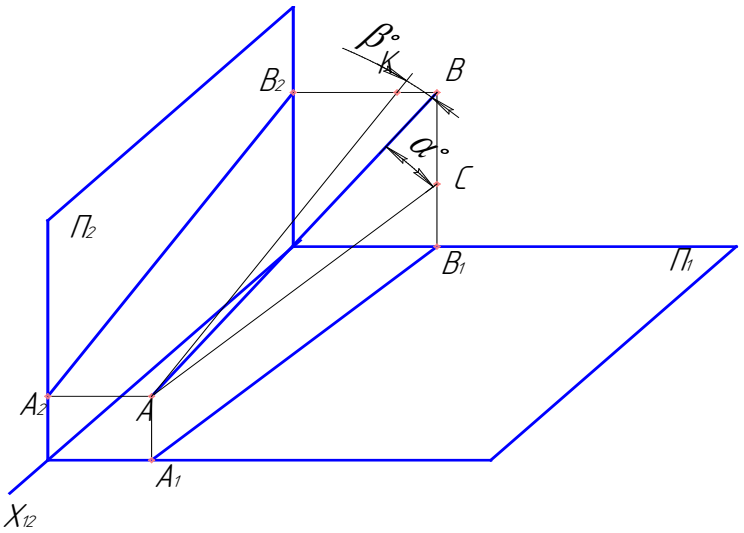


Рис. 15

Отрезок АВ занимает общее положение. В плоскости AA_1BB_1, занимающей горизонтально проецирующее положение построим отрезок АС ‖ A_1 B_1, получим прямоугольный треугольник АВС. В прямоугольном треугольнике АВС катет АС=A_1 B_1; катет ВС= BB_1-A_1 A_1; $BB_1=Z_B$; $AA_1=Z_A$; отсюда следует, что натуральная величина отрезка АВ есть гипотенуза прямоугольного треугольника, один катет которого равен проекции отрезка, а второй – разность расстояний концов отрезка до соответствующей плоскости проекции. α° – угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_1$. Построение натуральной величины отрезка на эпюре показано на рис. 16.

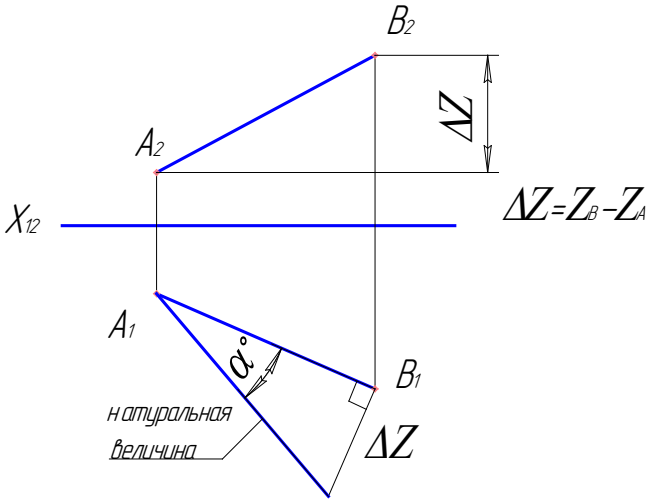


Рис. 16

Чтобы определить угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_2$ (угол β), надо построить прямоугольный треугольник, один катет которого – фронтальная проекция отрезка, а второй разность расстояний концов отрезка АВ до плоскости $П_2$.

Преобразование комплексного чертежа (метод замены плоскостей проекций)

Сущность метода замены плоскостей проекций заключается в том, что положение геометрической фигуры не изменяется, а вводится новая дополнительная плоскость, относительно которой геометрическая фигура занимает частное положение.

Рассмотрим шесть типовых задач, решаемых методом замены.

Задача 1: отрезок АВ прямой общего положения перевести в положение уровня.

Введем новую дополнительную плоскость $П_4$, параллельную отрезку АВ, при условии $П_4 \perp П_1$. В новой системе плоскостей $\frac{П_1}{П_4}$ проекция A_1 B_1 на плоскости $П_1$ останется прежней, а проекция на $П_4$ будет A_4B_4. При замене плоскостей $П_2$ на $П_4$ не изменяются расстояния от точек А и В до плоскости $П_1$ (высоты точек Z_A и Z_B).

При выбранном нами положении плоскости $П_4$ новая ось X_{14} располагается параллельно A_1B_1, а новая проекция A_4B_4 может быть построена на эпюре, если на соответствующих линиях связи точек А и В отложить от оси, высоты точек Z_A и Z_B (рис. 17).

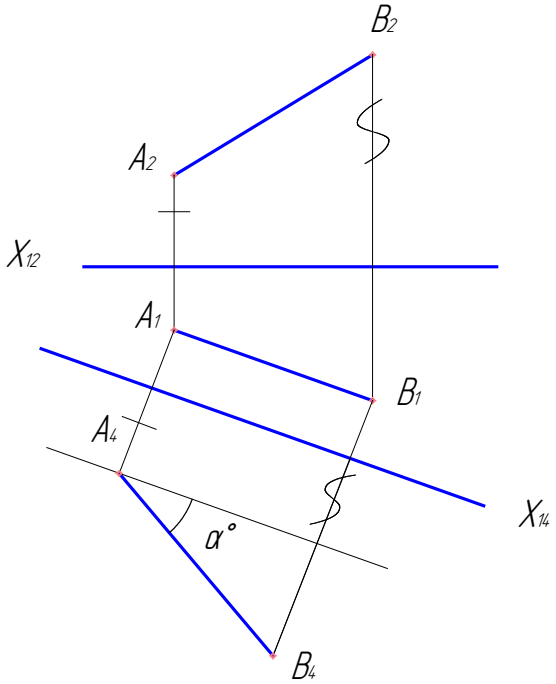


Рис. 17

Задача 2: прямую уровня перевести в проецирующее положение (рис. 18).

$$\frac{П_1}{П_2} \rightarrow \frac{П_1}{П_4};\ П_1 \perp П_4;\ П_4 \perp\ AB$$

Проводится ось $X_{14} \perp A_1B_1$ на любом расстоянии от проекции A_1B_1 по линии связи отложим расстояние ($Z_A = Z_B$).

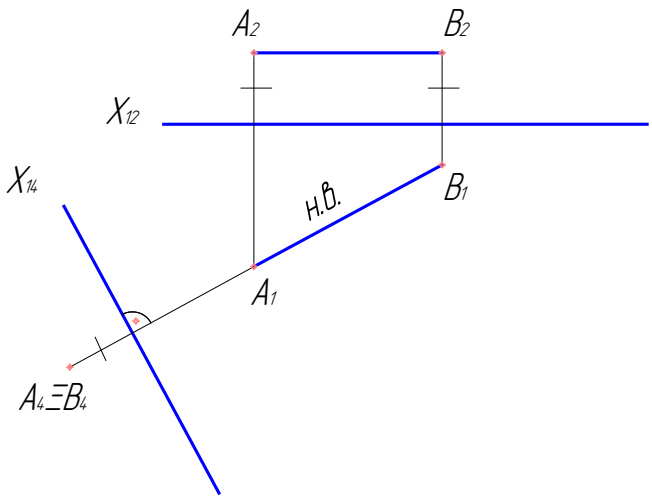


Рис. 18

Задача 3: прямую общего положения перевести в проецирующее положение.

Для решения этой задачи надо последовательно провести две замены (т.е. решить сначала задачу 1, затем задачу 2) (рис. 19).

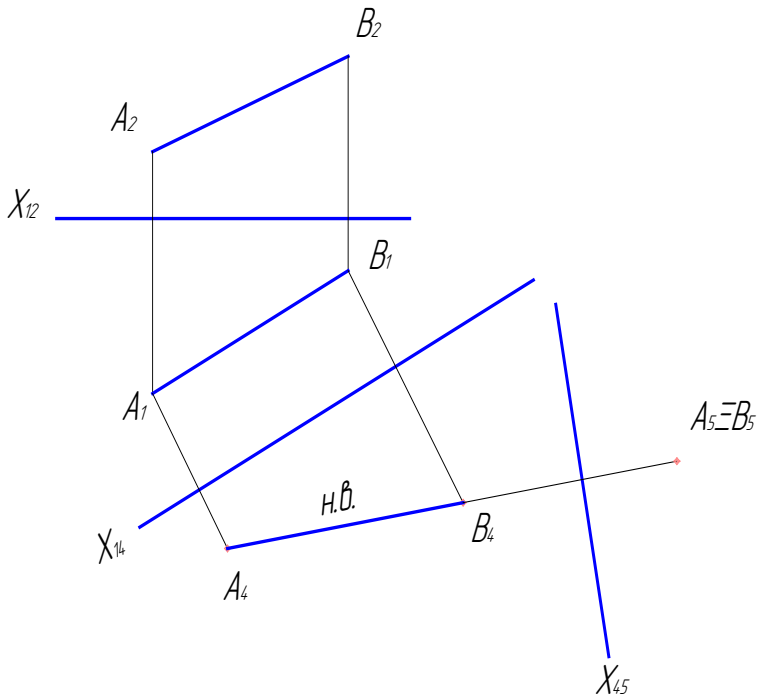


Рис. 19

Так, чтобы отрезок АВ прямой общего положения сделать горизонтально проецирующим, сначала переходим к системе $\frac{П_1}{П_4}(\frac{П_1}{П_2} \rightarrow \frac{П_1}{П_4})$, преобразуя прямую в прямую, параллельную плоскости $П_4$, а затем от системы $\frac{П_1}{П_4} \rightarrow$ переходим к системе $\frac{П_5}{П_4}$, сделав отрезок АВ прямой перпендикулярным к плоскости $П_5$.

Задача 4: плоскость общего положения перевести в проецирующее положение (рис. 20).

Для решения задачи построим в Δ ABC горизонталь h, преобразуем систему $\frac{П_1}{П_2}$ в систему $\frac{П_1}{П_4}$; $П_4$ перпендикулярна к плоскости Δ ABC; на чертеже проводим ось $X_{14} \perp h_1$.

α^0 – угол наклона плоскости к плоскости $П_1$.

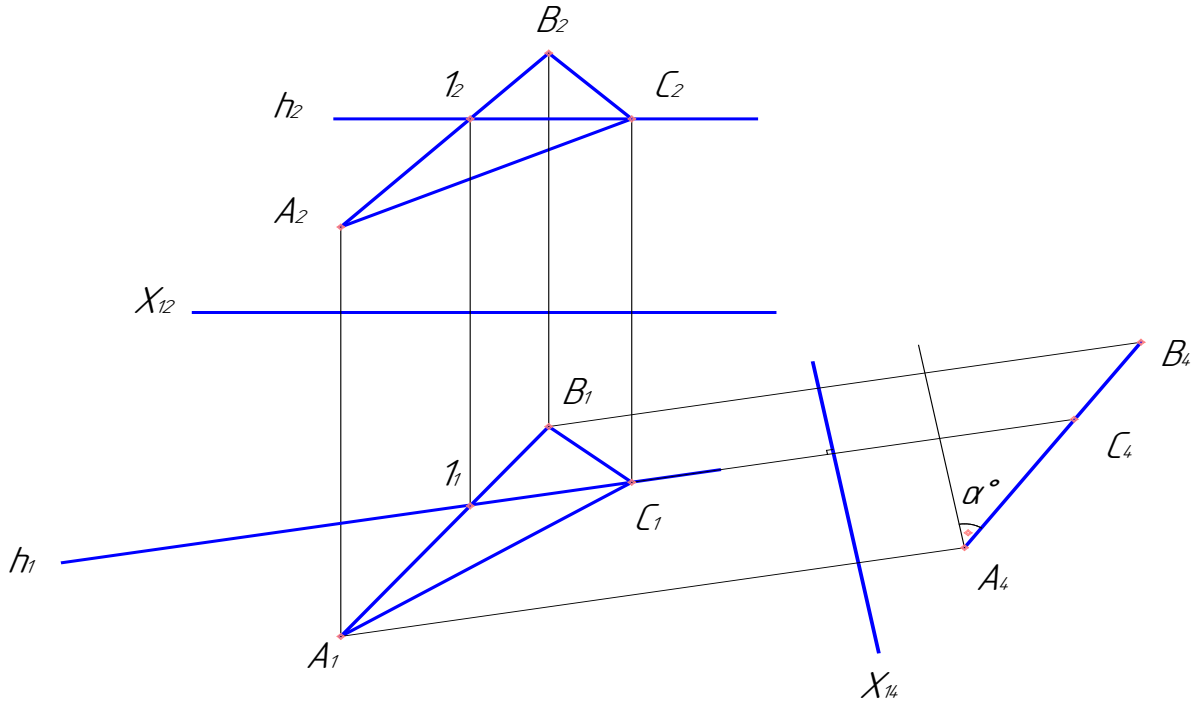


Рис. 20

Задача 5: проецирующую плоскость перевести в положение уровня (рис. 21).

Заменим плоскости $П_1$ на $П_4$; $П_4$ расположена параллельно плоскости Δ ABC. Проводим ось X_{14} параллельно $A_1B_1C_1$.

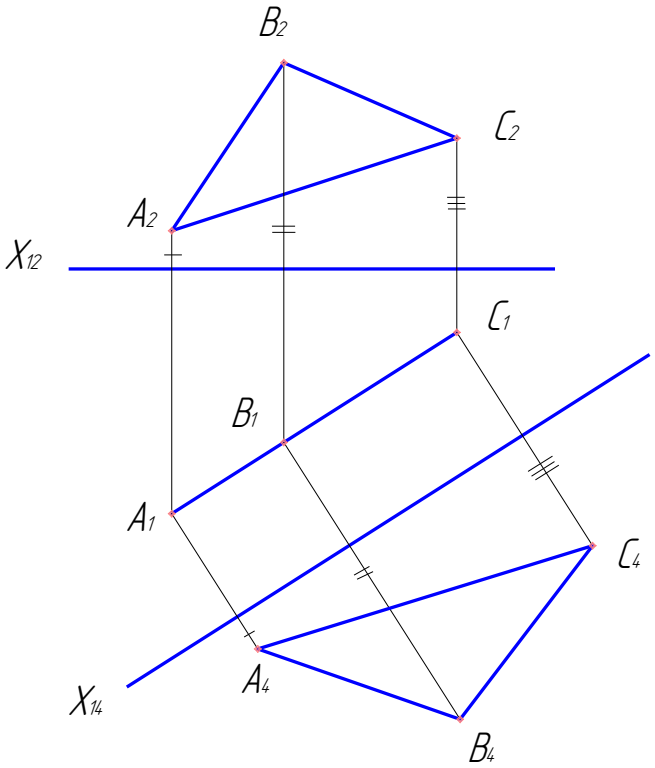


Рис. 21

Задача 6: плоскость общего положения перевести в положение уровня (рис. 22).

Чтобы решить эту задачу надо два преобразования, т.е. решить задачу 4, а затем задачу 5.

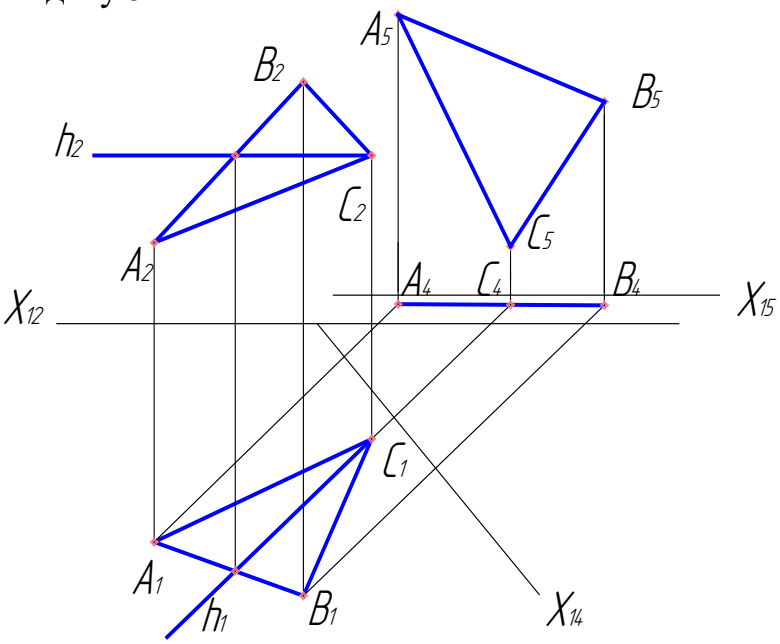


Рис. 22

Основные метрические задачи

Задача: а) Определить расстояние от точки до прямой. Чтобы решить эту задачу надо перейти из системы $\frac{П_1}{П_2}$ к системе $\frac{П_1}{П_4}$, т.е. преобразовав отрезок АВ прямой во фронтальное положение, а затем перейдя в новую систему $\frac{П_4}{П_5}$ преобразуем отрезок прямой в проецирующее положение. Искомое расстояние равно отрезку ℓ.

а) прямая занимает частное положение – положение уровня (рис. 23).

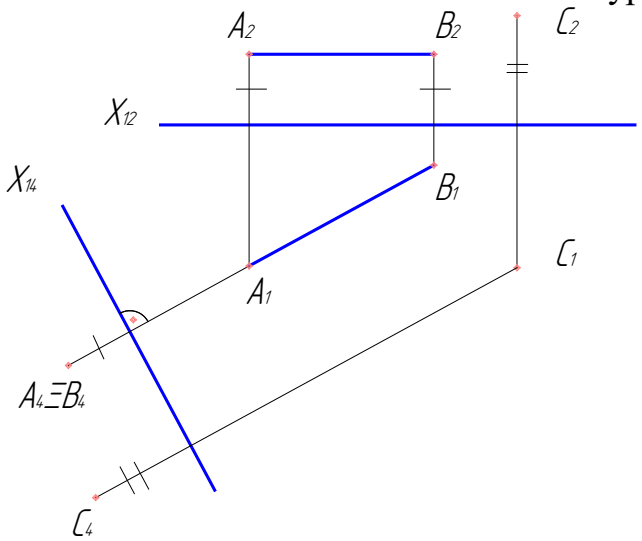


Рис. 23

В этом случае необходимо перевести заданную горизонтальную прямую во фронтально проецирующее положение. Искомое расстояние между точкой и прямой есть расстояние ℓ между вырожденной проекцией прямой и точкой.

б) прямая занимает общее положение (рис. 24).

Чтобы решить эту задачу надо выполнить две замены.

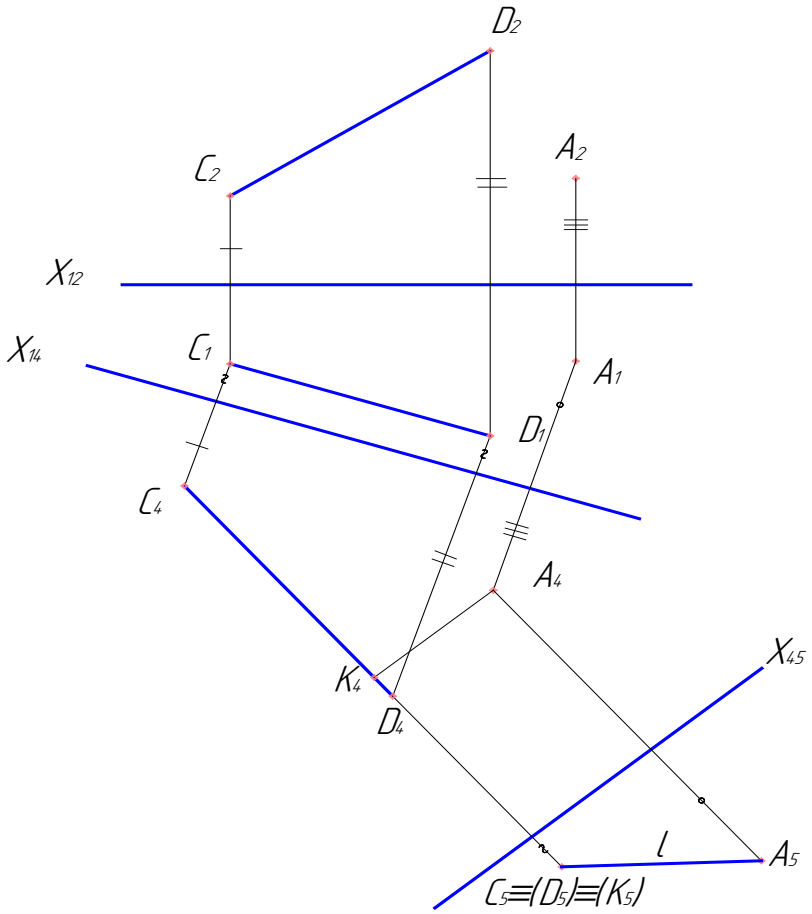


Рис. 24.

Задача: Определить расстояние между двумя параллельными прямыми.

а) прямые частного положения.

Заданные фронтальные прямые перевести в горизонтально проецирующее положение. Построить новую плоскость $П_4 \perp$ АВ (СД). На чертеже провести ось $X_{24} \perp A_2B_2$. Искомая натуральная величина расстояния между прямыми равна расстоянию ℓ между вырожденными проекциями прямых на плоскости $П_2$ (рис. 25).

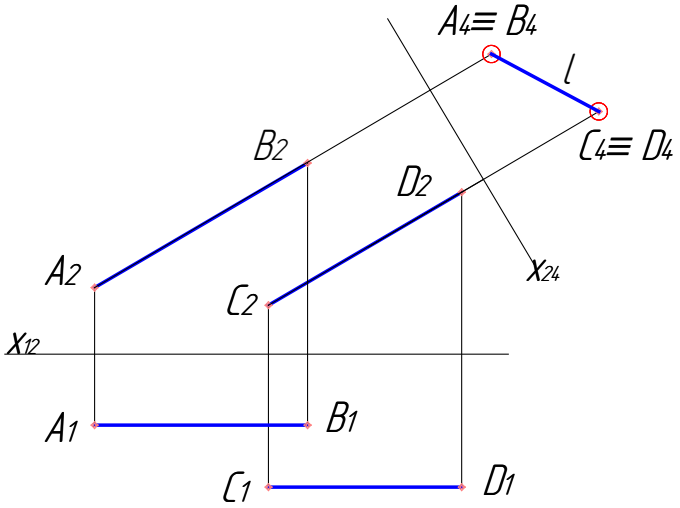


Рис. 25

б) прямые общего положения (рис. 26).

Данные прямые переведены в проецирующее положение.

При первой замене новая плоскость располагается параллельно заданным прямым и перпендикулярно к $П_1$, а при второй замене новая плоскость расположена перпендикулярно к прямым. Отрезок ℓ между вырожденными проекциями прямых является искомой натуральной величиной расстояния между данными прямыми.

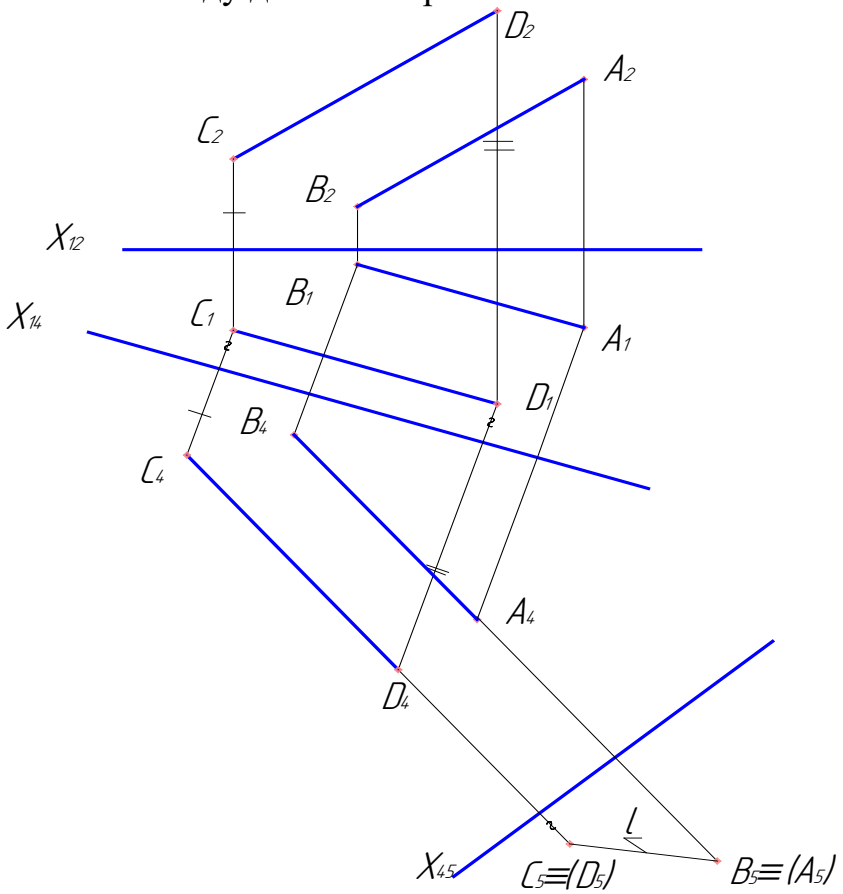


Рис. 26

Задача: определить расстояние между скрещивающимися прямыми

а) одна из прямых занимает проецирующее положение (рис. 27).

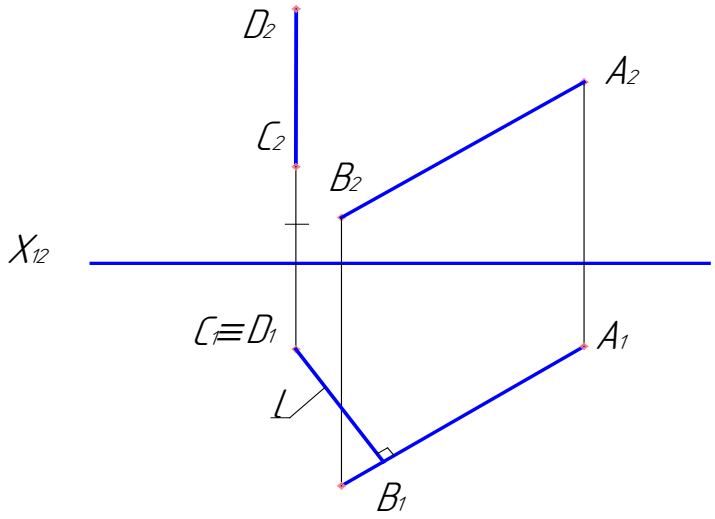


Рис. 27

б) обе прямые занимают общее положение (рис. 28).

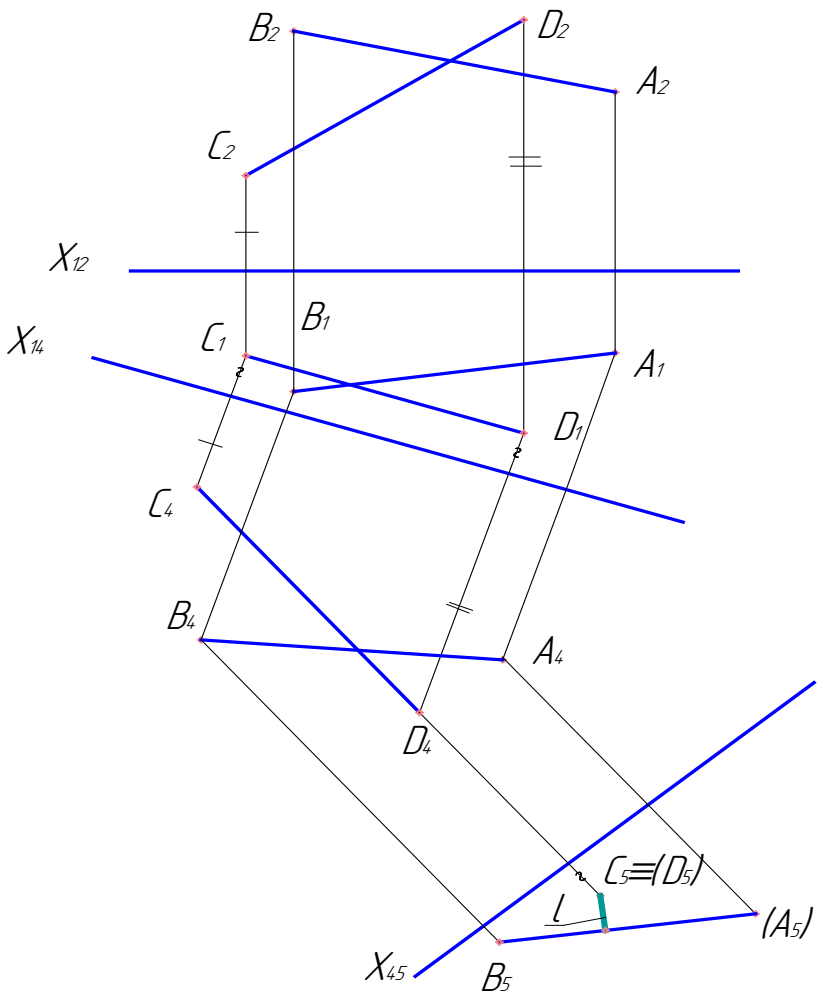


Рис. 28

План решения задачи сводится к определению расстояния между вырожденной проекцией одной прямой на плоскость, перпендикулярную к ней, и проекций другой прямой на эту плоскость.

Для преобразования одной из прямых в проецирующую на эпюре проводим последовательную замену обеих заданных плоскостей проекций.

Заданные прямые АВ и СД сначала спроецированы на новую плоскость $П_4$, параллельную прямой СД. Затем прямые АВ и СД спроецировать на новую плоскость $П_5$, перпендикулярную к той же прямой СД. На плоскость $П_5$ прямая СД проецируется в точку ($С_5Д_5$) , а расстояние ℓ между проецирующими $С_5Д_5$ и $А_5В_5$ является искомой величиной расстояния между данными АВ и СД.

Определение расстояния от точки до плоскости

Задача: определить расстояние от точки до плоскости, занимающей проецирующее расстояние (рис. 29).

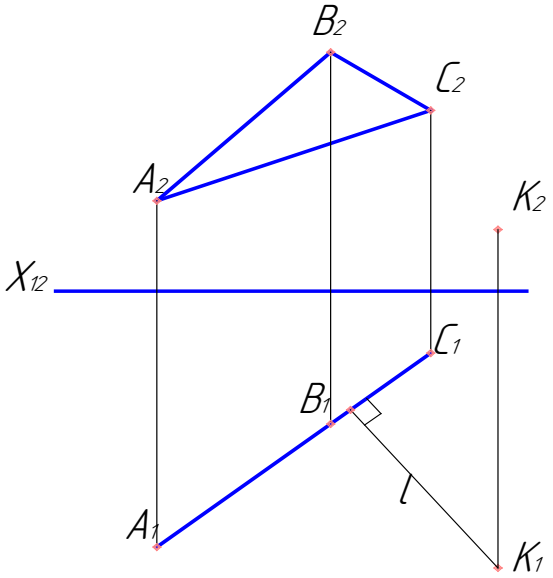


Рис. 29

Чтобы определить расстояние от точки до проецирующей плоскости, надо опустить перпендикуляр из точки на вырожденную проекцию плоскости (из горизонтальной проекции $К_1$ опускаем перпендикуляр на $А_1В_1С_1$)

Задача: определить расстояние от точки до плоскости общего положения (рис. 30).

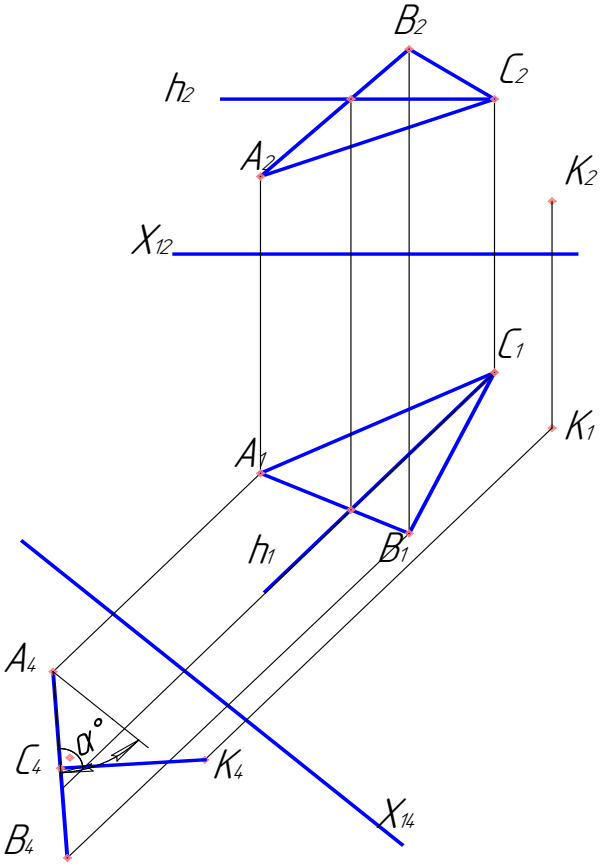


Рис. 30

Чтобы определить расстояние от точки К до плоскости общего положения заданной треугольником АВС, заменяем одну из плоскостей проекций в системе $\frac{П_1}{П_2}$ так, чтобы в новой системе $\frac{П_1}{П_4}$ треугольник занял проецирующее положение. Проводим через вершину С Δ АВС горизонталь h. Затем вводим новую плоскость $П_4$, перпендикулярную к плоскости Δ АВС, на эпюре проводим ось $X_{14} \perp h_1$, строим проекцию треугольника $A_4B_4C_4$ и затем из точки K_4 опускаем перпендикуляр на вырожденную проекцию треугольника. *l* – искомая натуральная величина расстояния от точки К до плоскости. Одновременно определим угол наклона (α°) ΔАВС к плоскости проекций $П_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУГРАННОГО УГЛА

Двугранный угол между двумя пересекающимися плоскостями измеряется линейным углом (рис. 31).

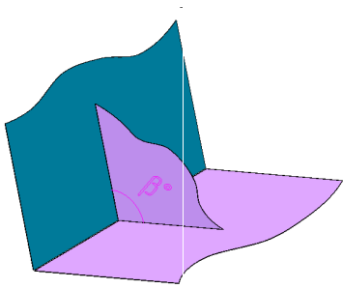


Рис. 31

Задача: определить двугранный угол, образованный пересечением плоскостей треугольников АВС и ДВС (рис. 32,33).

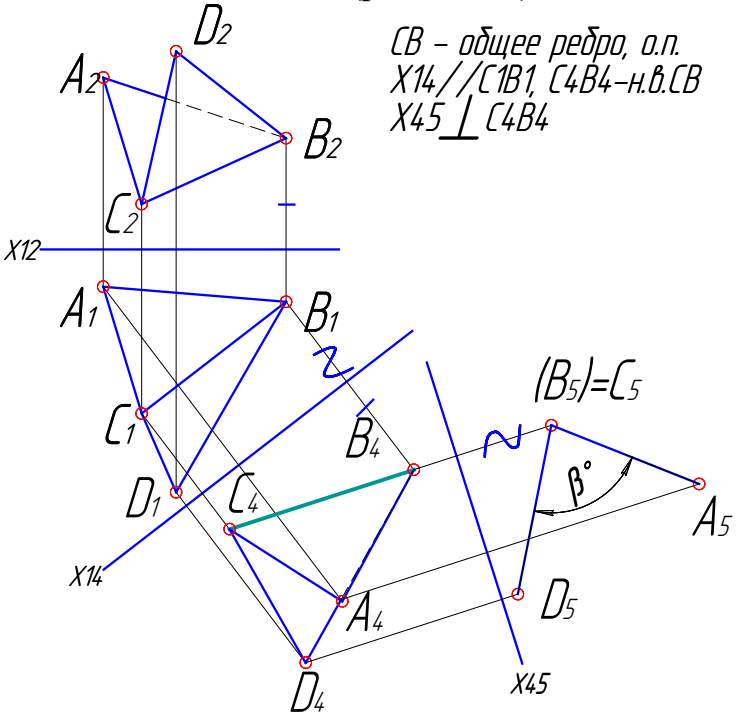


Рис. 32

При решении задачи надо определить, какое положение занимает общее ребро двугранного угла:

а) частное положение – одна замена (рис. 33);

б) общее положение – две замены (рис. 32).

Общее ребро надо в обоих случаях преобразить в точку, а каждая из проекций треугольников является вырожденной (прямой). Угол ß° между ними определяет величину двугранного угла между заданными плоскими фигурами.

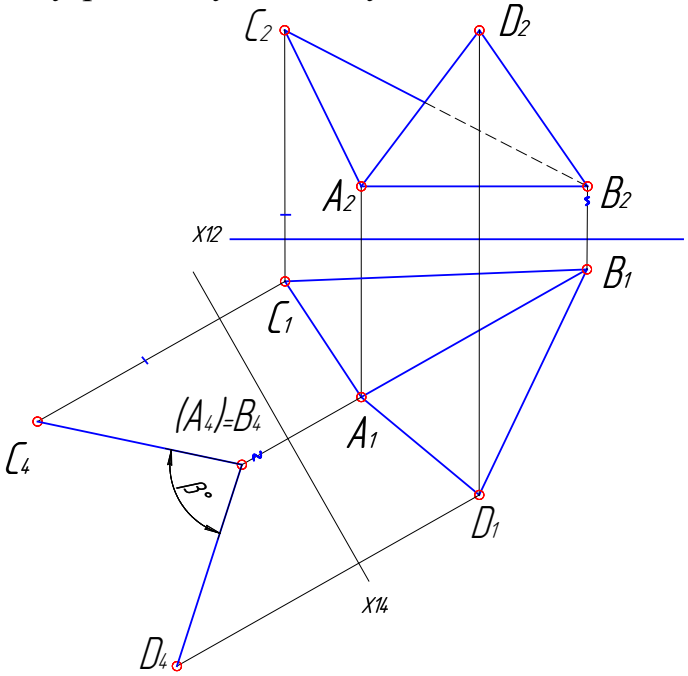


Рис. 33

СОДЕРЖАНИЕ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ №1

Лист 1:

1) по заданным координатам построить 2 проекции треугольника ABC и отрезка прямой DE;

2) определить точку пересечения DE с плоскостью треугольника ABC, показать видимость DE.

Лист 2:

1) определить натуральную величину треугольника ABC методом замены плоскостей проекций и угол (α˚) наклона треугольника ABC к плоскости $П_1$.

Лист 3:

1) построить линию пересечения пирамиды с плоскостью общего положения;

2) построить развёртку пирамиды с нанесением линии пересечения.

Лист 4:

1) определить натуральную величину двугранного угла, образованного боковыми гранями пирамиды.

Указания к решению задач РГР:

Работа выполняется в масштабе 1:1, на ватмане формат А3, варианты заданий даны в приложении 1 (табл. П1 и табл. П2).

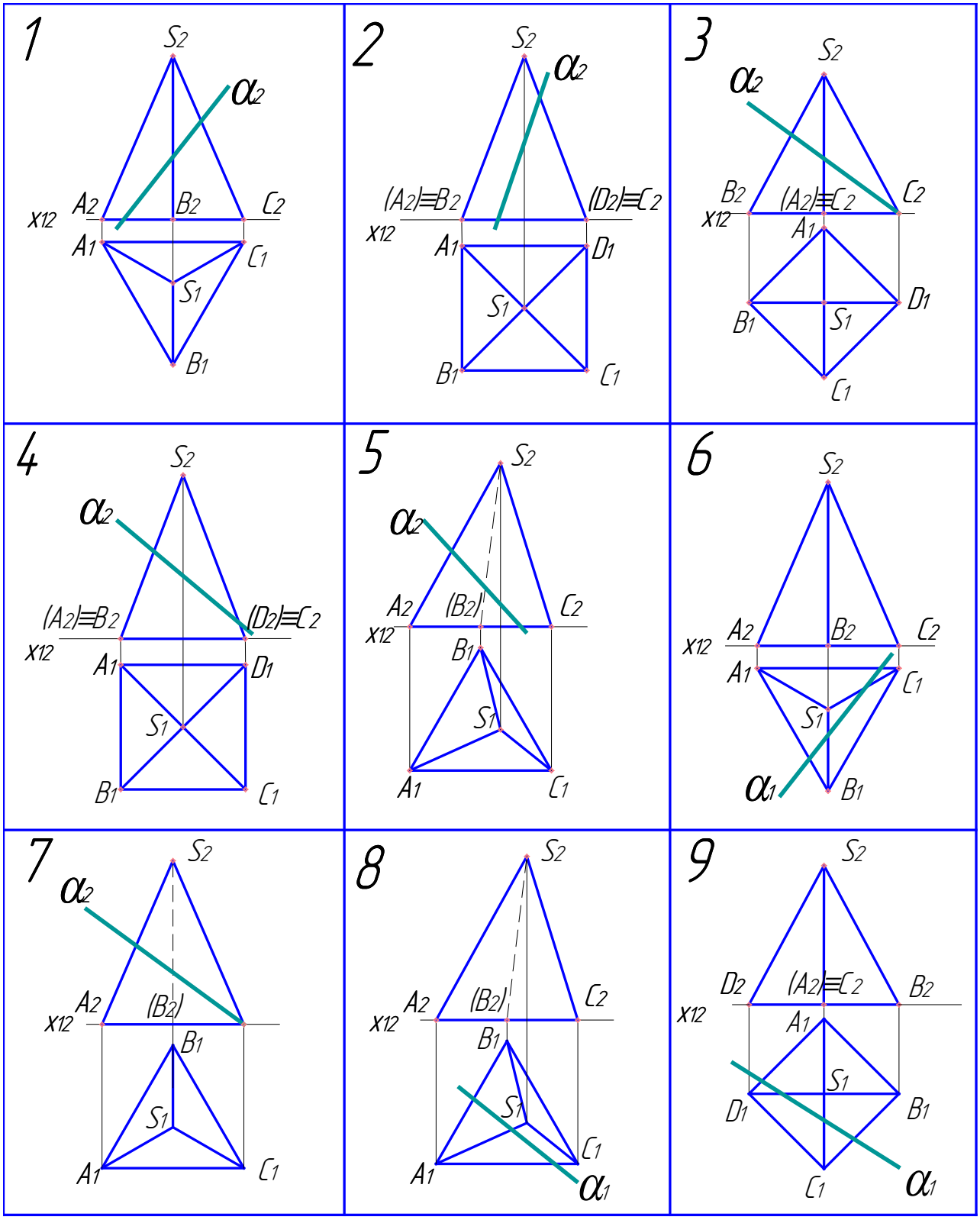
Образец выполнения РГР 1 дан в приложениях 2-5.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

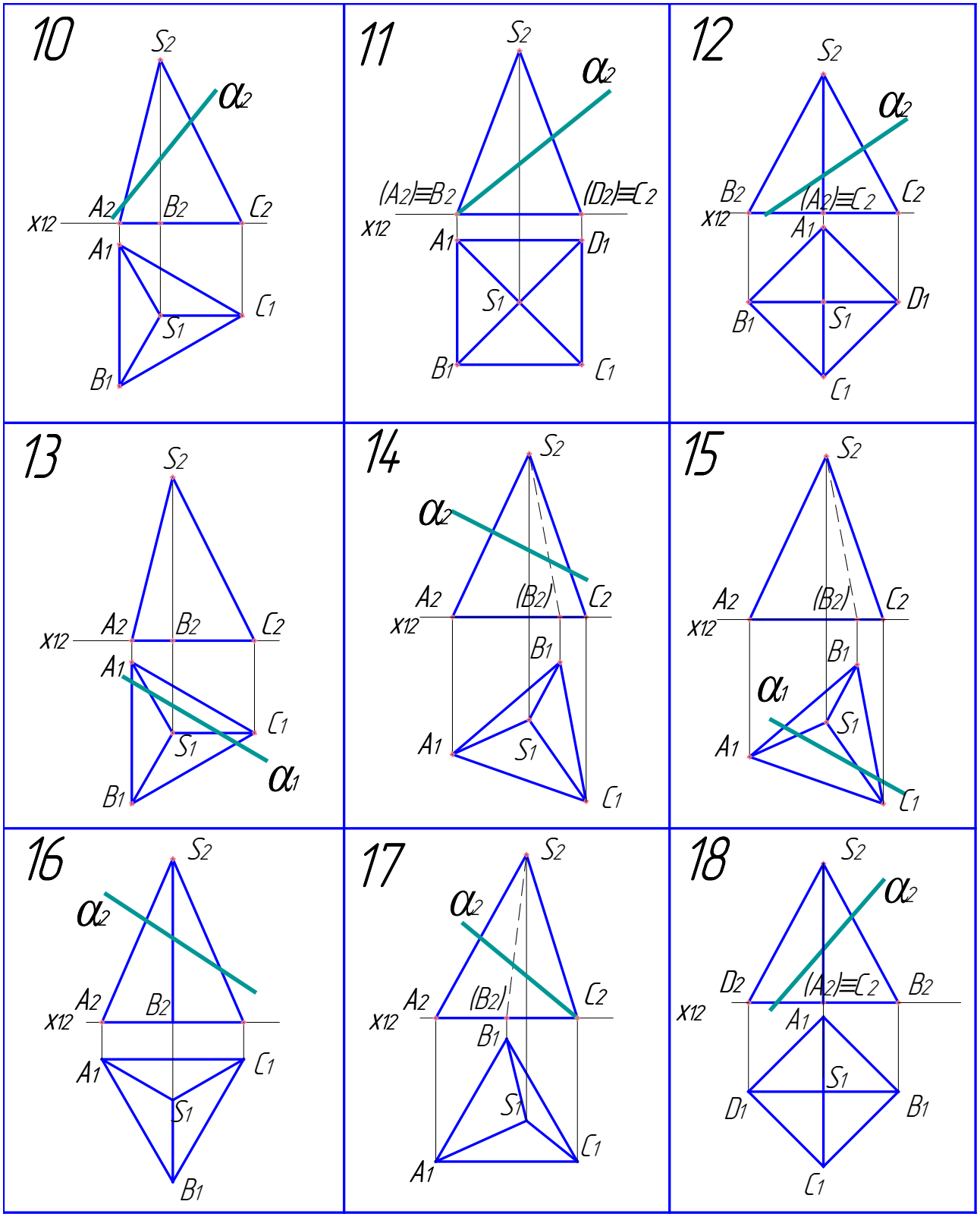
Таблица П1

№ варианта	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Y_B	Z_B	X_C	Y_C	Z_C	X_D	Y_D	Z_D	X_E	Y_E	Z_E	X_K	Y_K	Z_K
1	117	90	9	52	25	79	0	83	48	68	110	85	135	19	36	14	52	0
2	120	90	10	50	25	80	0	85	50	70	110	85	135	20	35	15	50	0
3	115	90	10	52	25	80	0	80	45	65	105	80	130	18	35	12	50	0
4	120	92	10	50	20	75	0	80	46	70	115	85	135	20	32	10	50	0
5	117	9	90	52	79	25	0	48	83	68	85	110	135	36	19	14	0	52
6	115	7	85	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	20	20	15	0	50
7	120	10	90	48	82	20	0	52	82	65	80	110	130	38	20	15	0	52
8	116	8	88	50	78	25	0	46	80	70	85	108	135	36	20	15	0	52
9	115	10	92	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	35	20	15	0	50
10	18	10	90	83	79	25	135	48	83	67	85	110	0	36	19	121	0	52
11	20	12	92	85	80	25	135	50	85	70	85	110	0	35	20	120	0	52
12	15	10	85	80	80	20	130	50	80	70	80	108	0	35	20	120	0	50
13	16	12	88	85	80	25	130	50	80	75	85	110	0	30	15	120	0	50
14	18	12	85	85	80	25	135	50	80	70	85	110	0	35	20	120	0	50
15	18	90	10	83	25	79	135	83	48	67	110	85	0	19	36	121	52	0
16	18	40	75	83	117	6	135	47	38	67	20	0	0	111	48	121	78	86
17	17	75	40	83	6	107	135	38	47	67	0	20	0	48	111	121	86	78
18	117	75	40	52	6	107	0	38	47	135	0	20	68	48	111	15	86	78
19	117	40	75	52	107	6	0	47	38	135	20	0	68	111	48	15	78	86
20	120	38	75	50	108	5	0	45	40	135	20	0	70	110	50	15	80	85

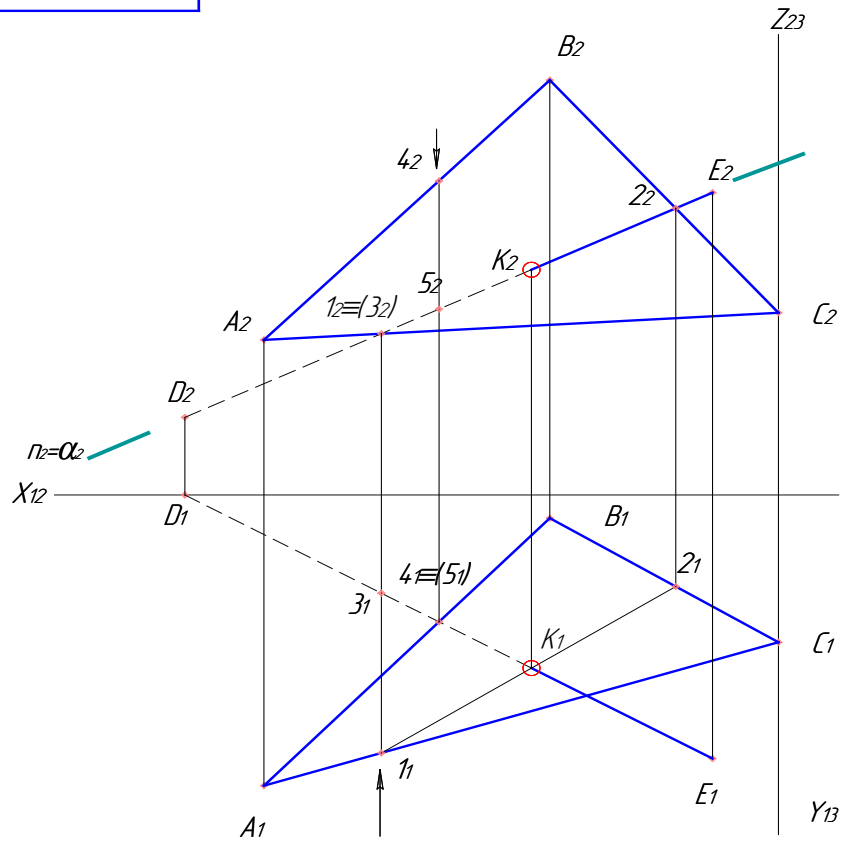
Таблица П2



* При выполнении данного задания изображение увеличить в 5 раз.



* При выполнении данного задания изображение увеличить в 5 раз.

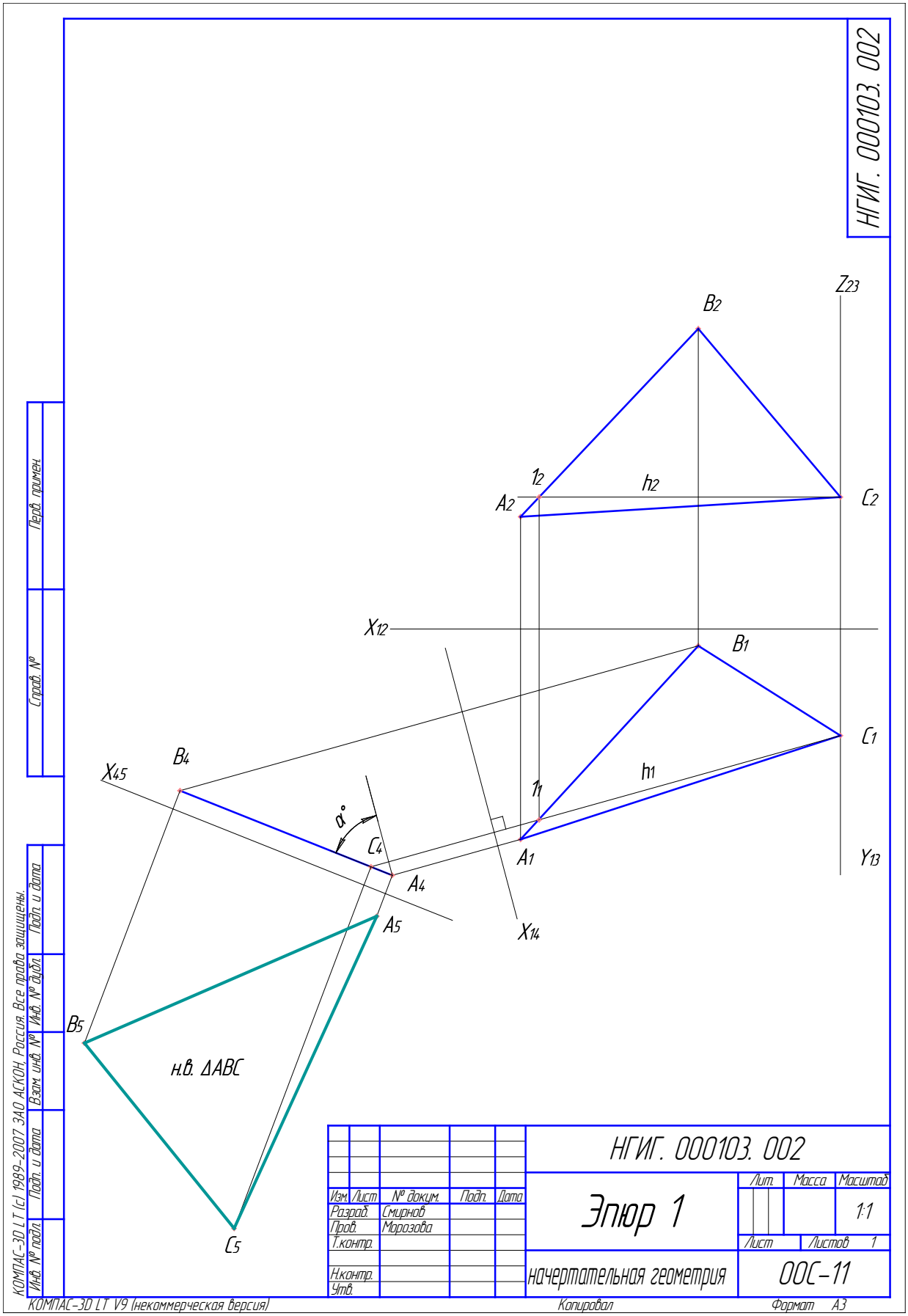


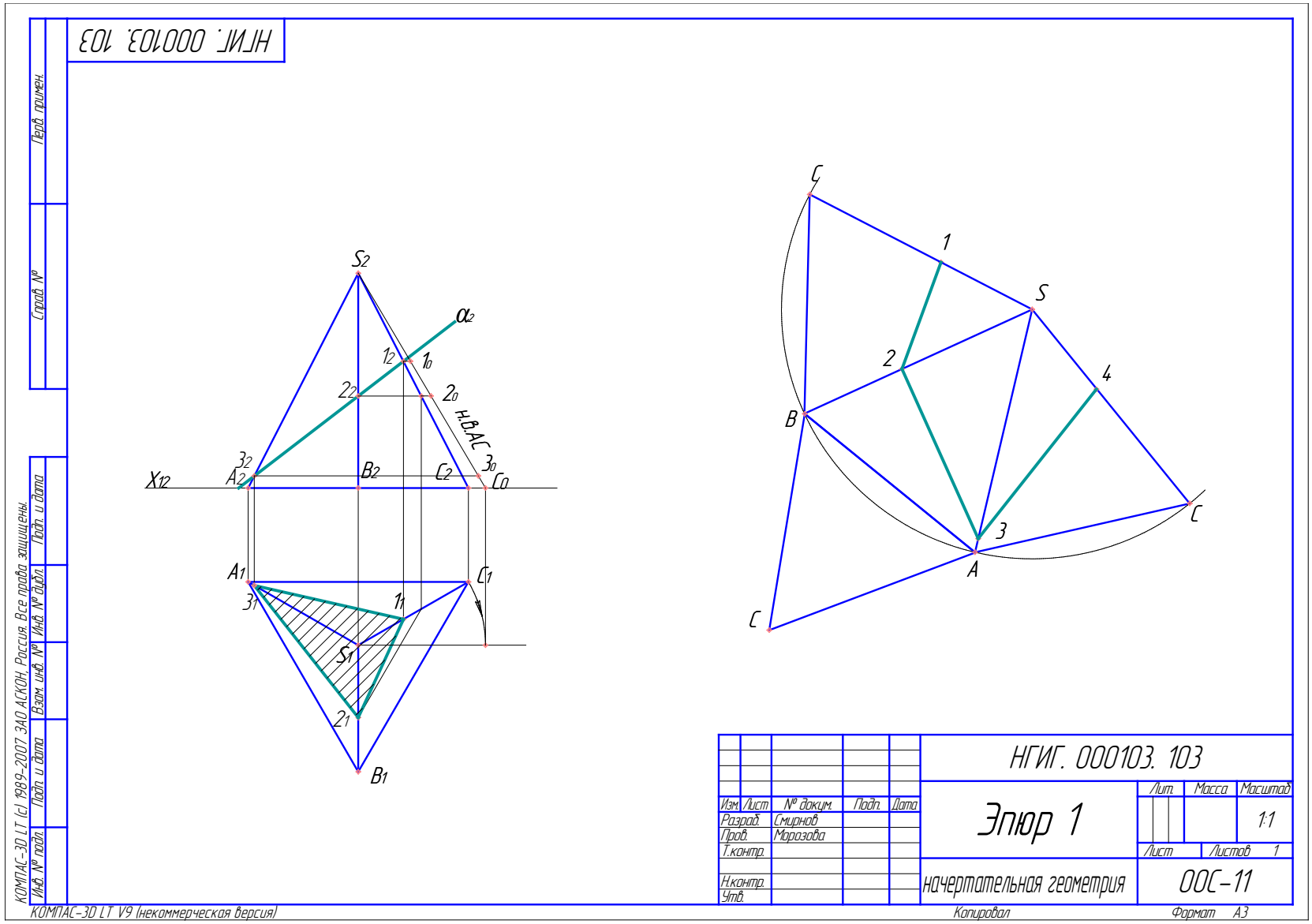
					НГИГ. 000103. 001		
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Эпюр 1	Лит.	Масса	Масштаб
Разраб.		Смирнов						1:1
Пров.		Морозова				Лист	Листов 1
Т.контр.					начертательная геометрия	ООС-11
Н.контр.						
Утв.						

Перв. примен. | Справ. № | Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

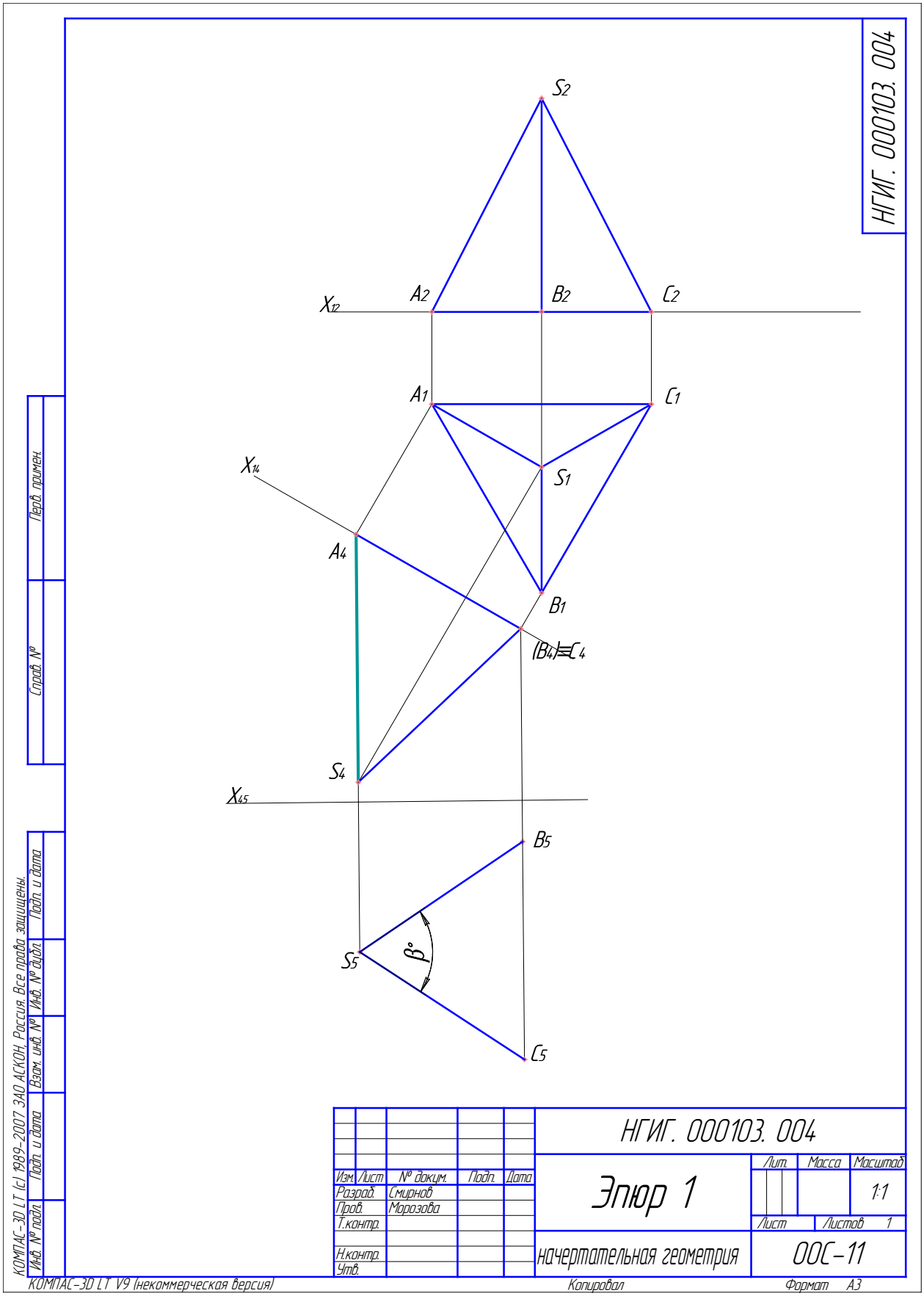
КОМПАС-3D LT (c) 1989-2007 ЗАО АСКОН, Россия. Все права защищены.

КОМПАС-3D LT V9 (некоммерческая версия) Копировал Формат А3


НГИГ. 000103. 002
Z23
B2
1₂
h2
A2
C2
X12
B1
C1
B4
X45
h1
1₁
α°
C4
A1
Y13
A4
A5
X14
B5
н.в. ΔABC
C5
НГИГ. 000103. 002
Изм. Лист № докум. Подп. Дата
Разраб. Смирнов
Пров. Морозова
Т.контр.
Н.контр.
Утв.
Эпюр 1
Лит. Масса Масштаб
1:1
Лист Листов 1
начертательная геометрия
ООС-11
Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.
КОМПАС-3D LT (c) 1989-2007 ЗАО АСКОН, Россия. Все права защищены.
КОМПАС-3D LT V9 (некоммерческая версия)
Копировал
Формат А3


НГИГ. 000103. 103
S2
α2
12
10
22
20
н.в.АС
32
X12
A2
B2
C2
30
C0
A1
C1
31
11
S1
21
B1
C
1
S
2
4
B
3
A
C
C
НГИГ. 000103. 103
Эпюр 1
Лит.
Масса
Масштаб
1:1
Лист
Листов 1
Изм. Лист № докум. Подп. Дата
Разраб. Смирнов
Пров. Морозова
Т.контр.
Н.контр.
Утв.
начертательная геометрия
ООС-11
Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.
КОМПАС-3D LT (c) 1989-2007 ЗАО АСКОН, Россия. Все права защищены.
КОМПАС-3D LT V9 (некоммерческая версия)
Копировал
Формат А3

ПРИЛОЖЕНИЕ 6



РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ И МЕТРИЧСКИХ ЗАДАЧ
Методические указания
к решению задач по дисциплине «Начертательная геометрия»
для студентов всех направлений очной и заочной форм обучения

ЧЕЛЫШЕВА Ирина Александровна

Подписано в печать Формат 60x84 1/16
Бум. офсет. Усл. печ. л. Уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Заказ Бесплатно
Саратовский государственный технический университет
410054, Саратов, Политехническая ул., 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ. 410054, Политехническая ул., 77